www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. *Il est demandé EXPRESSEMENT aux candidats de donner des démonstrations CLAIRES, CONCISES et RIGOUREUSES. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé, ou dont on n'aurait pas contrôlé que les hypothèses sont vérifiées.*

Les candidats DOIVENT RESPECTER LES NOTATIONS du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.

Il est INUTILE de RECOPIER le présent énoncé.

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Notations

N désigne l'ensemble des entiers naturels, Z l'anneau des entiers relatifs, R le corps des nombres réels et N^*, Z^* et R^* désignent les ensembles N, Z et R privés de zéro. Enfin, si n est un élément de N on note E_n le R-espace vectoriel des fonctions polynômes réelles d'une variable réelle, x, et définies par des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

I

Soit f_1 la fonction réelle de la variable t définie sur R^* par $f_1(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$

1°) - Montrer que f_1 est prolongeable par continuité en une fonction f, définie, continue et positive sur R.
Etablir que f est continûment dérivable sur R.

2°) a) Etudier les variations de f.

b) De quelle nature sont les branches infinies du graphe de f ?

c) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

3°) a) Déterminer le développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre 5.

b) On admet que f se développe en une série entière à coefficients réels de rayon de convergence R strictement supérieur à 1 :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

Calculer a_0.
Trouver une relation entre les n éléments $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.
Retrouver les résultats de 3°) a).

c) En considérant $f(t) + \dfrac{t}{2}$, démontrer que pour tout élément p de N^* on a $a_{2p+1} = 0$.

4°) a) Intégrer l'équation différentielle : (1) $\quad t\dfrac{dy}{dt} + y = \dfrac{e^t - te^t - 1}{t(e^t - 1)}$.

b) Etablir qu'il existe une et une seule fonction g définie, continue sur R et dont la restriction à R^* soit solution de (1).
Exprimer g(t) à l'aide de f(t).

c) Montrer que la courbe (C) représentative de g possède une tangente au point d'abscisse zéro.
Ecrire l'équation de cette tangente ; préciser la nature de ce point et la position de (C) par rapport à sa tangente en ce point.

II

Soit ϕ une fonction réelle de la variable réelle, x, possédant une dérivée continue ϕ' sur l'intervalle [a,b], où a et b sont dans Z et vérifient $a < b$.
Pour tout x de R on note [x] la partie entière de x ; c'est-à-dire l'unique élément de Z tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

1°) - Montrer que la fonction $\beta_1 : R \to R$, définie pour tout x par :

$$\beta_1(x) = x - [x] - \tfrac{1}{2}$$

est 1-périodique, continue par morceaux, bornée sur R et coïncide sur [0,1[avec la fonction polynôme :

$$x \longmapsto B_1(x) = x - \tfrac{1}{2}.$$

Tournez la page S.V.P.

E.N.S.I. de CHIMIE:Groupe Sud:F
page 157
1989 1

2°) a) Vérifier l'égalité :

$$\sum_{\substack{a+1 \le z \le b \\ z \in Z}} \phi(z) = \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b (x - [x])\phi'(x)\,dx$$

b) Déduire de a) l'égalité :

$$\sum_{\substack{a \le z \le b \\ z \in Z}} \phi(z) = \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})\phi'(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(\phi(a) + \phi(b)\right)$$

3°) – Soit $\gamma_n = -\ln(n) + \sum_{\substack{1 \le p \le n \\ p \in N}} \frac{1}{p}$, $(n \in N^*)$.

a) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in N^*}$ est convergente dans R ; on note γ sa limite.

b) Donner une valeur n_0 de n telle que γ_{n_0} soit une valeur approchée de γ à 5.10^{-3} près.

Calculer γ_{n_0}.

III

1°) - Démontrer que l'on peut construire une suite unique $(B_n)_{n\in N}$ de fonctions polynômes réelles vérifiant, pour tout x réel, les trois propriétés suivantes :

(1) $B_0(x) = 1$

(2) $\forall n \in N^*,\ B'_n(x) = n B_{n-1}(x)$

(3) $\forall n \in N^*,\ \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$

(où B'_n est la dérivée de B_n).

Préciser $B_1(x)$ et $B_2(x)$.

Quel est le monôme de plus haut degré du polynôme qui définit B_n ?

2°) - Pour tout couple (x,t) de réels on pose :

$$F(x,t) = e^{tx} f(t)$$

où f est la fonction définie en I-1°).

a) Prouver qu'il existe une famille $(A_n)_{n\in N}$ de fonctions polynômes réelles telle que :

$$\forall (x,t) \in R \times [-1,1],\ F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Préciser $A_0(x)$.

b) Montrer que $F(x,t)$ admet des dérivées partielles.

Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ en fonction de $F(x,t)$ et en déduire que la fonction définie par $t \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ est développable en série entière.

c) Démontrer, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$A_n = B_n$$

d) Etablir que pour tout couple (x,t) de réels on a :

$$F(x,-t) = F(1-x,t).$$

Donner une relation entre $B_n(x)$ et $B_n(1-x)$.

3°) a) Pour tout p de N on note e_p la fonction polynôme réelle : $x \longmapsto x^p$.

Montrer que la famille $(e_p)_{\substack{0 \le p \le n \\ p \in N}}$ est une base de E_n, que l'on appellera base canonique de E_n, et en déduire la dimension de E_n.

b) Etablir que la famille $(B_j)_{\substack{0 \le j \le n \\ j \in N}}$ constitue une base de E_n.

4°) a) Démontrer que l'on peut définir un endomorphisme ψ de E_n en posant $\psi(P) = Q$ où, pour tout x réel, $Q(x) = P(1-x)$.

b) Ecrire la matrice de ψ dans la base canonique de E_n.

ψ est-il un automorphisme de E_n ?

c) Déterminer les valeurs propres de ψ.

L'espace E_n admet-il une base de vecteurs propres ?

Si oui, en exhiber une et donner la matrice diagonale de ψ dans cette base.

IV

1°) - Etablir qu'il est possible de prolonger à R la restriction de B_2 à $[0,1]$ en une fonction paire, continue, 1-périodique, notée β_2.

2°) - Démontrer que β_2 est développable en série de Fourier et calculer son développement.

3°) – Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{k\in N^*} \frac{1}{k^2}$.

- FIN -

page 158 E.N.S.I. de CHIMIE: Groupe Sud: P 1989 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail